Concours GE2I session 2014

Composition : Physique 4 (mécanique, optique)

Durée : 3 Heures

Les calculatrices sont autorisées.

N.B : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte deux grandes parties : OPTIQUE et MECANIQUE.

OPTIQUE

A Lois DE SNELL-DESCARTES

On considère un dioptre de surface S, séparant deux milieux homogènes, d'indices de réfraction différents n_1 et n_2. Un rayon lumineux rectiligne, incident dans le milieu 1, tombant sur le dioptre en un point I, donne naissance à un rayon réfléchi dans le milieu 1 et à un rayon réfracté dans le milieu 2.

Soit $\vec{N}$ le vecteur normal à S en I, dont le sens est défini de 2 vers 1. Le plan d'incidence est le plan défini par le rayon lumineux et $\vec{N}$, et l'angle d'incidence est l'inclinaison du rayon incident sur la normale à la surface.

A.1 Enoncer les lois définissant le rayon réfléchi.

I.A.2. Enoncer les lois définissant le rayon réfracté.

I.B Fibre optique à saut d'indice

Soit une fibre optique F constituée d'un cœur cylindrique de rayon a et d'indice n_1, entouré d'une gaine d'indice n_2 inférieur à n_1 et de rayon extérieur b. Les faces d'entrée et de sortie sont perpendiculaires au cylindre d'axe Oz formé par la fibre. L'ensemble, en particulier la face d'entrée, est en contact avec un milieu d'indice n_0 et pour les applications numériques on supposera que ce milieu est de l'air pour lequel $n_0 = 1$.

I.B.1 *« Zigzag » plan*

Un rayon lumineux SI arrive en un point I sur la face d'entrée de la fibre. A quelle(s) condition(s) d'incidence ce rayon a-t-il, dans la fibre, un trajet plan ?

On considère un rayon SI incident sur le cœur et contenu dans le plan Oxz (Figure 1). On appelle i l'angle d'incidence et θ l'angle de la réfraction sur la face d'entrée de la fibre.

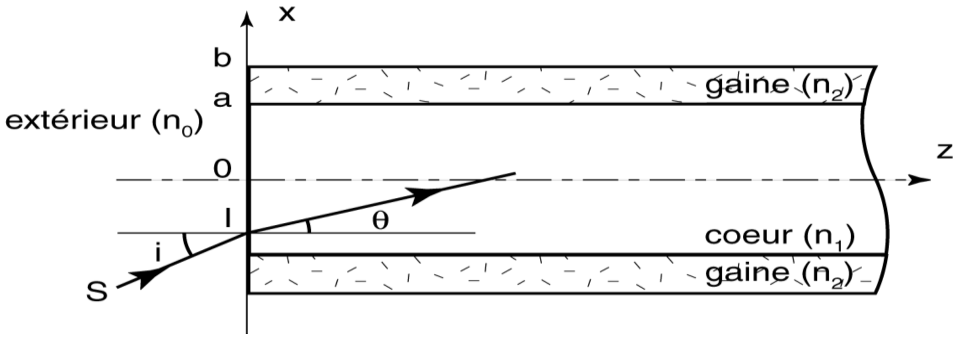


Figure 1

B.2 Déterminer en fonction de n_0, n_1 et n_2 la condition que doit satisfaire i pour que le rayon réfracté ait une propagation guidée dans le cœur.
La valeur maximale de i est alors désignée par i_a (angle d'acceptance de la fibre).
B.3 On appelle ouverture numérique (O.N.) du guide la quantité $\text{O.N.} = n_0 \sin i_a$. Exprimer O.N. en fonction de n_1 et n_2.
B.4 Calculer i_a et O.N. pour une fibre d'indices $n_1 = 1{,}456$ (silice) et $n_2 = 1{,}410$ (silicone). Quelle serait la valeur de ces grandeurs pour un guide à base d'arséniure de gallium pour lequel $n_1 = 3{,}9$ et $n_2 = 3{,}0$? Commentaires.

L'atténuation de la lumière dans les fibres optiques est due à l'absorption et à la diffusion par le matériau constitutif du cœur et par ses impuretés (Fe^{2+}, Cu^{2+}, OH^-). Elle se mesure en décibels par km :

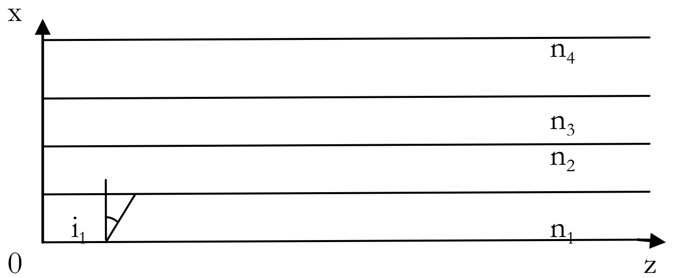
$$A_{dB/km} = \frac{10}{\ell_{(km)}} \log_{10}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)$$

où ϕ_1 et ϕ_2 désignent les flux lumineux dans les plans de front successifs 1 et 2 distants de ℓ.

B.5 On parvient couramment à réaliser des fibres dans lesquelles le flux, après un parcours de 50 km, représente 10 % du flux incident. Calculer l'atténuation de telles fibres.

I.C Fibres à gradient d'indice

On considère un empilement de lames à faces parallèles, homogènes, de faible épaisseur et d'indices décroissants ($n_j < n_{j-1}$).
Dans le premier milieu le rayon fait un angle i1 avec la verticale Ox et est contenu dans le plan xoz (plan de la figure)



1. Reproduire le schéma et tracer les rayons dans les milieux 2, 3 et 4.
2. Montrer qu'en traversant les différents milieux le rayon reste contenu dans le plan xoz et que $n_j sin i_j = cte$.
3. On considère le cas où la répartition d'indice est continue :$n = n(x)$ où x désigne la cote comptée suivant la surface ascendante.

3.1 En vous inspirant de la 2ème question montrer que $\frac{dz}{dx} = \tan i_x$ et que l'équation du rayon lumineux passant par M s'écrit : $z - z_0 = \int_0^x \frac{n_0 \sin(i_0) dx}{\sqrt{n^2(z) - n_0^2 \sin^2(i_0)}}$.

Pour cela on considérera une couche d'épaisseur dx (très faible).

3.2 Déterminer explicitement l'équation de ce rayon dans le cas où :$n^2(z) = n_0^2 - kx$.
3.3 Quelle est la nature géométrique de cette courbe ?

MECANIQUE

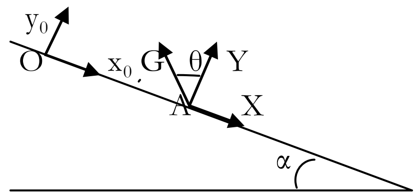
Sur une piste rectiligne, faisant un angle α avec l'horizontale, un skieur glisse, à partir d'un point O. sa vitesse initiale est nulle.

Au point O est associé est associé un référentiel galiléen, orthonormé direct $R_0\left(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Oy_0}, \overrightarrow{Oz_0}\right)$ avec $\overrightarrow{Ox_0}$ colinéaire à la pente et dirigé vers le bas, $\overrightarrow{Oy_0}$ étant perpendiculaire à la pente et dirigée vers le haut.

Au point A, d'abscisse x, où se trouve le skieur, on pourra associer le repère R_A dont les axes $\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AY}, \overrightarrow{AZ}$ sont respectivement parallèles à $\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Oy_0}\ et\ \overrightarrow{Oz_0}$.

Le repère R_A est en translation par rapport à R_0 avec une vitesse $V = \dot{x}$

Le skieur est assimilé à un solide de masse m et on néglige la masse des skis. Le contact ski-skieur est supposé ponctuel en A. Le centre de masse G du skieur est défini par le vecteur $\overrightarrow{AG}$, de norme l constante et faisant un angle θ avec $\overrightarrow{AY}$. Le moment d'inertie du skieur autour d'un axe $\overrightarrow{GZ}$, parallèle à $\overrightarrow{AZ}$, vaut 1.



Outre son poids, le skieur subit de la part de l'air des actions mécaniques dont le torseur G se réduit à une force de frottement colinéaire à $\overrightarrow{Ox_0}$ et de module KSV^2 (S désigne l'aire offerte par le skieur à l'air et K est le coefficient de pénétration).

Le torseur des actions mécaniques exercées par le skieur a pour éléments de réduction en A une force $\vec{F}$ et un couple $\vec{C}$ parallèle à $\overrightarrow{AZ}$

Le contact ski-piste est sans frottement solide.

A Première partie

1. Exprimer, en fonction de $, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}, \ddot{x}\ et\ \ddot{\theta}$, la vitesse et l'accélération de G dans R_0.
2. Exprimer le moment dynamique $\vec{D}_G$ en G du skieur, dans R_0, et en déduire, dans le même référentiel, le moment dynamique $\vec{D}_A$ en A.
3. Exprimer le théorème de la résultante dynamique pour l'ensemble ski-skieur, dans R_0, en projection sur $\overrightarrow{Ox_0}\ et\ \overrightarrow{Oy_0}$.
4. Exprimer le théorème de la résultante dynamique pour le skieur seul, au point A, dans le référentiel R_0, en projection sur $\overrightarrow{Oz_0}$.

B Deuxième partie : étude du mouvement sur $\overrightarrow{Ox_0}$

On suppose que le skieur a acquis une inclinaison constante par rapport à la pente : $\theta = \theta_0$.

1. Montrer que le skieur atteint une vitesse limite V_0 dont on donnera l'expression littérale puis la valeur numérique pour $\alpha = 45°\ avec\ m = 80\ kg, S = 0.4\ m^2, K = 0.4\ uSI, g = 9.8\ ms^{-2} et\ \theta_0 = 0$.
2. Déterminer la loi $V(t)$ qu'on présentera sous la forme $\frac{V(t)}{V_0} = f\left(\frac{t}{\tau}\right)$ *où* τ est un temps caractéristique dont on donnera l'expression littérale puis la valeur numérique. Tracer le graphe correspondant.
3. a) Donner la loi $x(t)$ qu'on présentera sous la forme $\frac{x(t)}{x_0} = g(\frac{t}{\tau})$ où x_0 est la distance caractéristique $x_0 = \tau V_0$ dont on donnera la valeur numérique. Tracer le graphe correspondant.

   b) Que se passe t-il pour x et t petits par rapport à, respectivement, $x_0\ et\ \tau$?
4. a) Par un calcul direct, déterminer le travail $W(t)$ fourni depuis l'instant t=0 contre le frottement de l'air et l'exprimer en fonction des paramètres $E_0 = \frac{1}{2} m V_0^2\ et\ \frac{t}{\tau}$.

   b) Exprimer en fonction de $E_0\ et\ \frac{t}{\tau}$ l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} mV^2$ et en déduire le bilan énergétique à l'instant t.